PITAGORAS ACADEMIA

FÍSICA

Profesor Abraham Visalaya

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL- MOVIMIENTO PLANETARIO

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

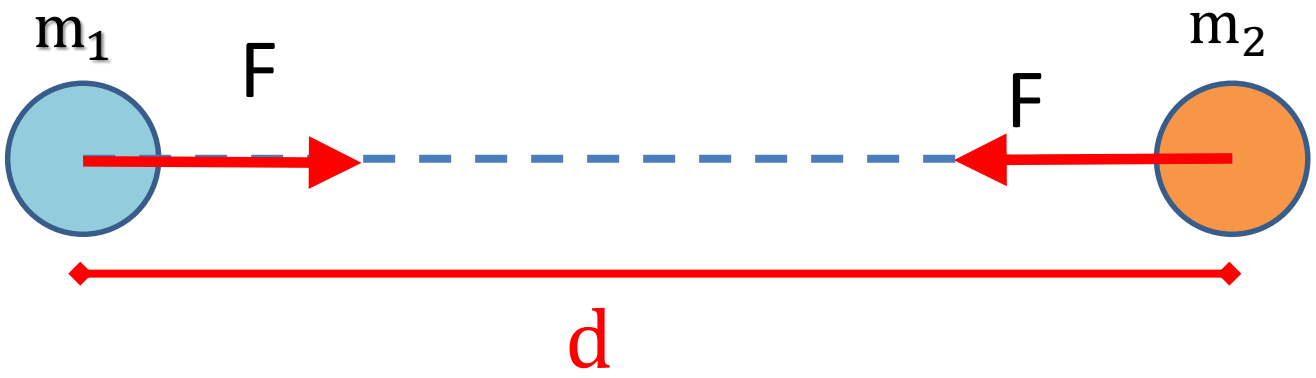
Antes de 1687 se había acumulado una gran cantidad de información acerca de los movimientos de la Luna y los planetas, pero no se había logrado una comprensión clara de las fuerzas relacionadas con estos movimientos. En dicho año, Isaac Newton proporcionó la clave que abrió los secretos de los cielos.

En este capítulo se estudia la ley de gravitación universal. Se enfatiza una descripción del movimiento planetario porque la información astronómica proporciona una importante prueba de la validez de esta ley. Luego se muestra que las leyes del movimiento planetario elaboradas por Johannes Kepler se siguen de la ley de gravitación universal y del principio de conservación de la cantidad de movimiento angular. Se concluye con la deducción de una expresión general para la energía potencial gravitacional y el examen de la energía del movimiento planetario y de satélites.

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

LEY DE NEWTON DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

"Toda partícula en el universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas".



$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

F= Fuerza gravitacional de atracción

d= distancia entre los centros

m_1 y m_2 : masas

G : Constante de gravitación universal

$G = 6{,}673 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kg^2$

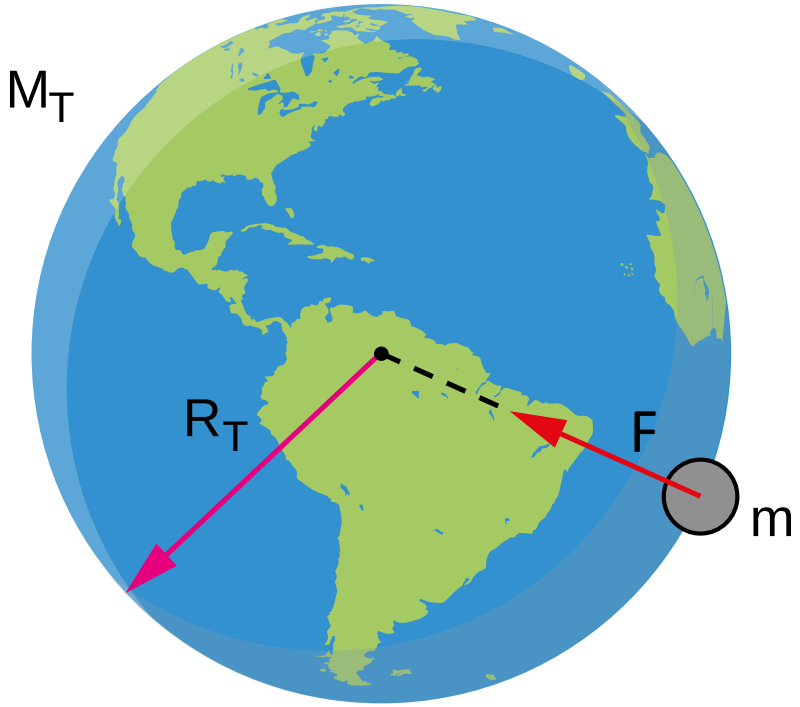
Válido para para partículas cuyo tamaños son muy pequeños comparada con la distancia que los separa

Henry Cavendish (1731–1810) midió la constante gravitacional universal en un importante experimento.

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

La ecuación también se usa para mostrar que la fuerza gravitacional que ejerce una distribución de masa esféricamente simétrica y de tamaño finito sobre una partícula afuera de la distribución es la misma como si toda la masa de la distribución se concentrara en el centro.

Por ejemplo, la magnitud de la fuerza que ejerce la Tierra sobre una partícula de masa "m" cerca de la superficie de la Tierra es:



$$W = F = G\frac{M_T . m}{R_T^2}$$

Donde

M_T : Masa de la tierra

$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

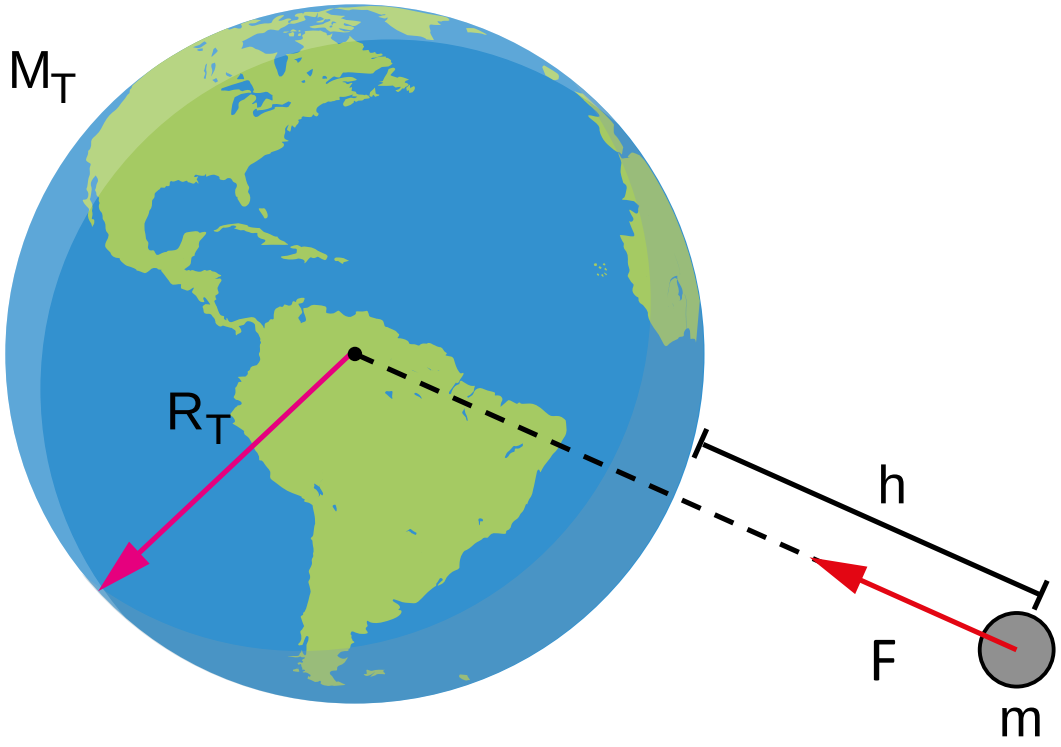
R_T : Radio de la tierra

$R_{T_{medio}} = 6{,}37 \times 10^{6}$ m

W : Peso

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Por ejemplo, la magnitud de la fuerza que ejerce la Tierra sobre una partícula de masa “m” que se encuentra a una altura “h” sobre la superficie de la Tierra es:



$$W_h = F = G\frac{M_T . m}{(R_T + h)^2}$$

Donde

M_T : Masa de la tierra

$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

R_T : Radio de la tierra

$R_{T_{medio}} = 6{,}37 \times 10^{6}$ m

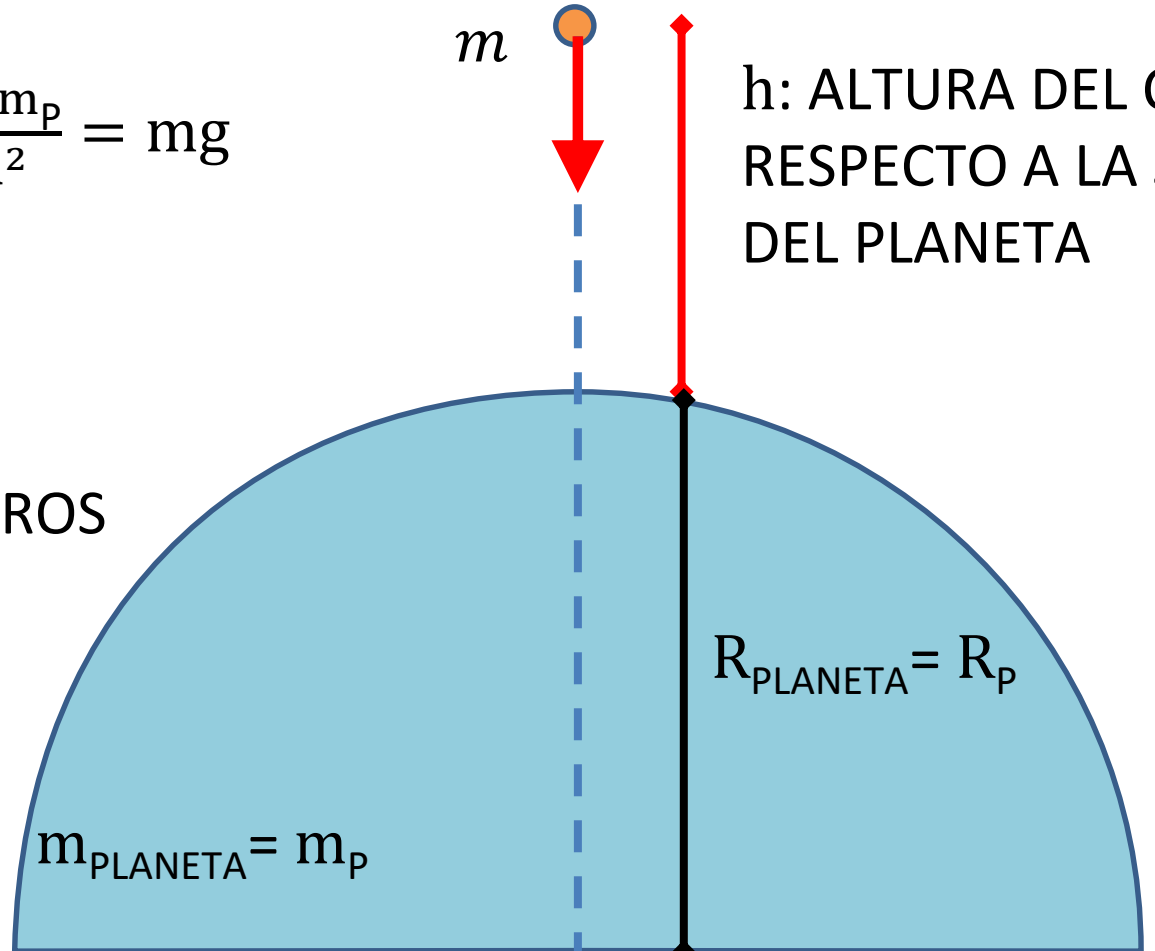
GRAVITACIÓN UNIVERSAL

ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD EN FUNCIÓN DE LA ALTURA RESPECTO A LA SUPERFICIE DE UN PLANETA

$$F = G\frac{m\,m_P}{d^2} = mg$$

$$d = h + R_P$$

DISTANCIA ENTRE CENTROS



h: ALTURA DEL CUERPO RESPECTO A LA SUPERFICIE DEL PLANETA

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

A una altura h

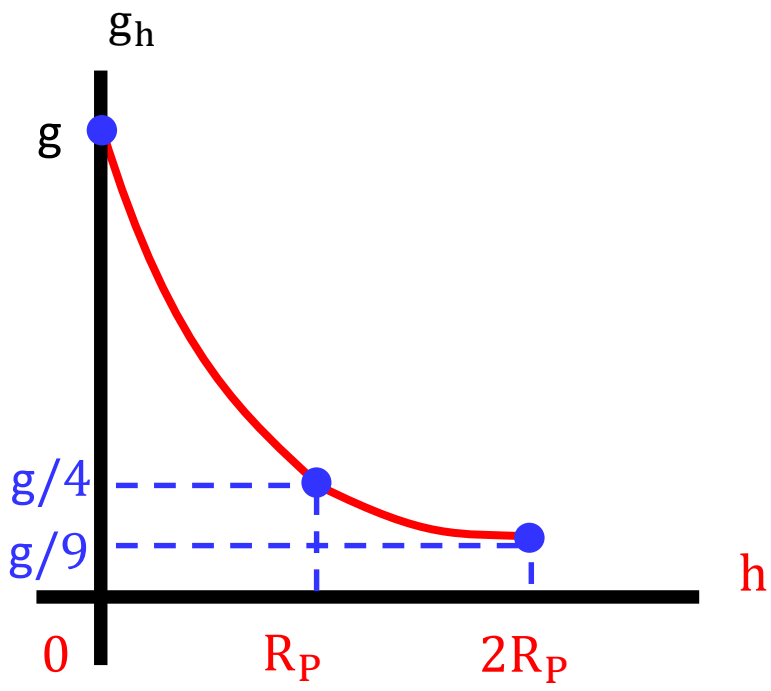
COMO $F_g = G\dfrac{m\,m_P}{d^2} = mg_h$ Y $d = h + R_P \Rightarrow$

$$\boxed{g_h = G\frac{m_P}{(h + R_P)^2}}$$

CUANDO $h = 0 \Rightarrow g_h = g = G\dfrac{m_P}{{R_P}^2}$ (GRAVEDAD EN LA SUPERFICIE)

$$g_h = G\frac{m_P}{(h + R_P)^2} = G\frac{m_P}{{R_P}^2}\frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_P}\right)^2}$$

$$\boxed{g_h = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R_P}\right)^2}}$$



GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Observación: la aceleración de la gravedad a una altura pequeña con respecto al radio del planeta, es igual a la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta .por lo tanto el peso de un cuerpo a una altura pequeña comparada con el radio del planeta, es igual al peso del cuerpo en la superficie del planeta.

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA (E_P , U)

La energía potencial gravitatoria o gravitacional asociada a cualquier par de partículas de masas m_1 y m_2 separadas por una distancia "d"es:

$$E_P = -\frac{Gm_{1.}\, m_2}{d}$$

La energía potencial es negativa porque la fuerza gravitacional entre las partículas es atractiva y se considera la energía potencial gravitatoria como cero cuando la separación entre las partículas es infinita

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

LAS LEYES DE KEPLER Y EL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS

Los humanos han observado los movimientos de los planetas, estrellas y otros objetos en el espacio durante miles de años.

Modelo geocéntrico fue elaborado y formalizado por el astrónomo griego Claudius Ptolomeo (100 – 170 d.C.) y fue aceptado durante los siguientes 1400 años.

En 1543 el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473 – 1543) sugirió que la tierra y los otros planetas daban vueltas en órbitas circulares alrededor del Sol (el modelo heliocéntrico).

El astrónomo danés Tycho Brahe (1546–1601) quería determinar cómo estaban construidos los cielos y siguió un proyecto para determinar las posiciones de las estrellas y los planetas.

El astrónomo alemán Johannes Kepler fue auxiliar de Brahe, después de muchos cálculos laboriosos, Kepler encontró que los datos de Brahe acerca de la revolución de Marte alrededor del Sol conducían a un modelo exitoso.

LEYES DE KEPLER

LO PROPUESTO POR COPÉRNICO AYUDÓ AL ASTRÓNOMO JOHANNES KEPLER EN EL DESCUBRIMIENTO DE LAS LEYES DEL MOVIMIENTO PLANETARIO, COMO RESULTADO DEL ANÁLISIS CUIDADOSO DE LAS MEDICIONES ASTRONÓMICAS DE TYCHO. ESTAS LEYES, DENOMINADAS LEYES DE KEPLER, SON UNA DESCRIPCIÓN CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO PLANETARIO Y SE ENUNCIAN DE LA SIGUIENTE MANERA:

I. LOS PLANETAS DESCRIBEN ÓRBITAS ELÍPTICAS, ESTANDO EL SOL EN UNO DE SUS FOCOS.

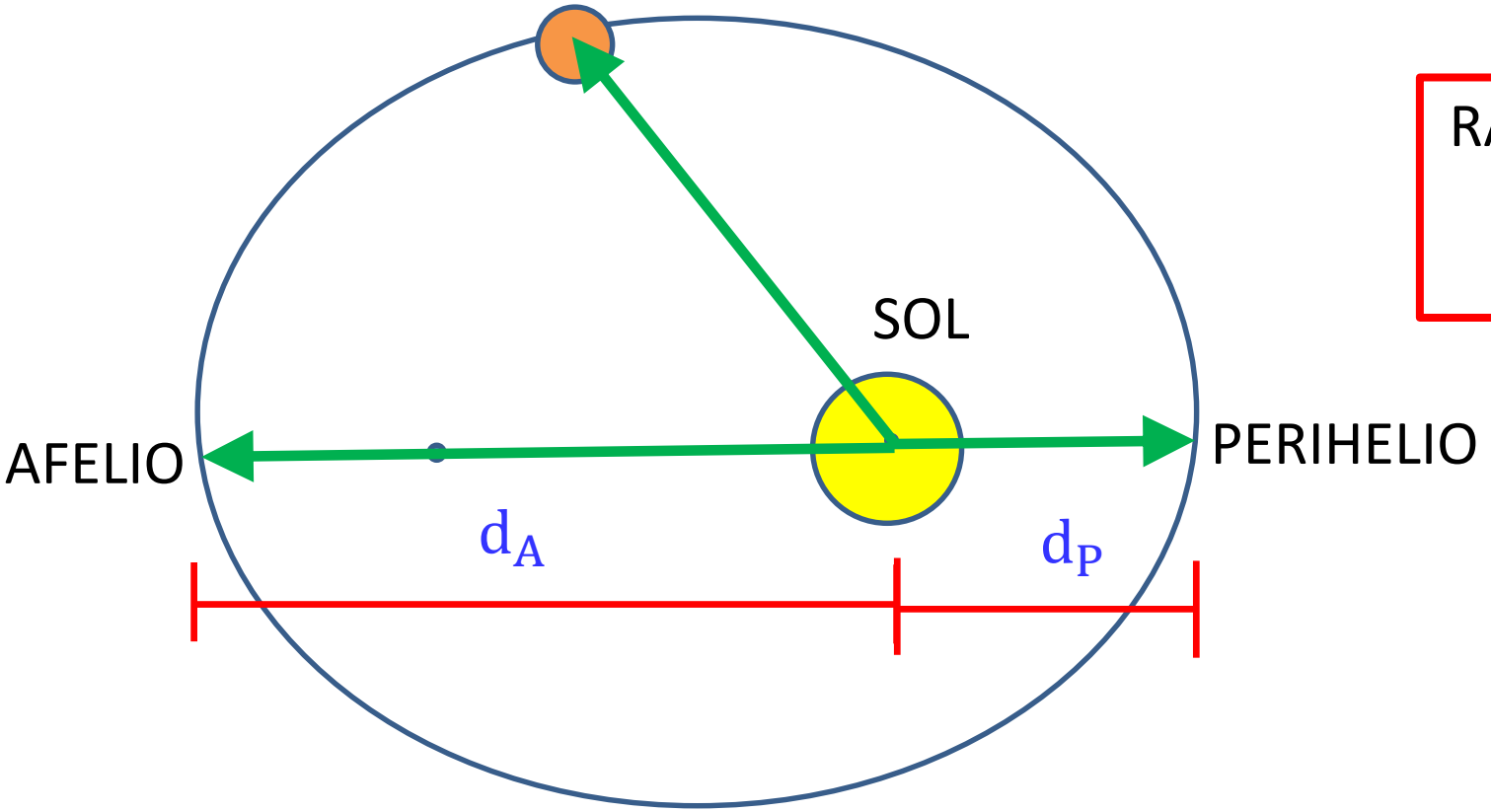
II. EL VECTOR POSICIÓN DE CUALQUIER PLANETA CON RESPECTO AL SOL BARRE ÁREAS IGUALES DE LA ELIPSE EN TIEMPOS IGUALES. (ESTA PROPOSICIÓN SE DENOMINA LA LEY DE LAS ÁREAS).

III. LOS CUADRADOS DE LOS PERÍODOS DE REVOLUCIÓN SON PROPORCIONALES A LOS CUBOS DE LAS DISTANCIAS PROMEDIO DE LOS PLANETAS AL SOL. (ESTA LEY PUEDE EXPRESARSE POR LA ECUACIÓN $T^2 = kR_M{}^3$, SIENDO k UNA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD).

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

PRIMERA LEY DE KEPLER: LEY DE LAS ORBITAS

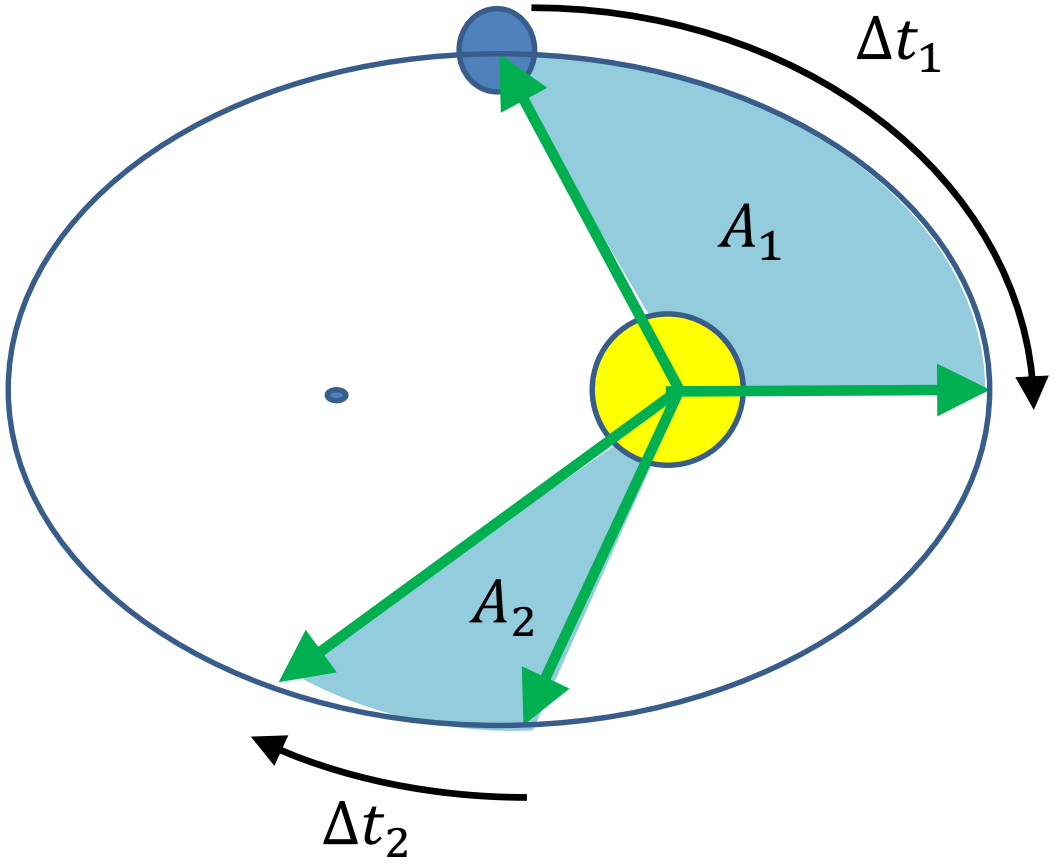
LOS PLANETAS SE MUEVEN EN ORBITAS ELIPTICAS ALREDEDOR DEL SOL, ESTANDO EL SOL EN UNO DE LOS FOCOS DE LA ELIPSE.



RADIO MEDIO DE LA ORBITA :

$$R_m = \frac{d_A + d_P}{2}$$

SEGUNDA LEY DE KEPLER: LEY DE LAS ÁREAS

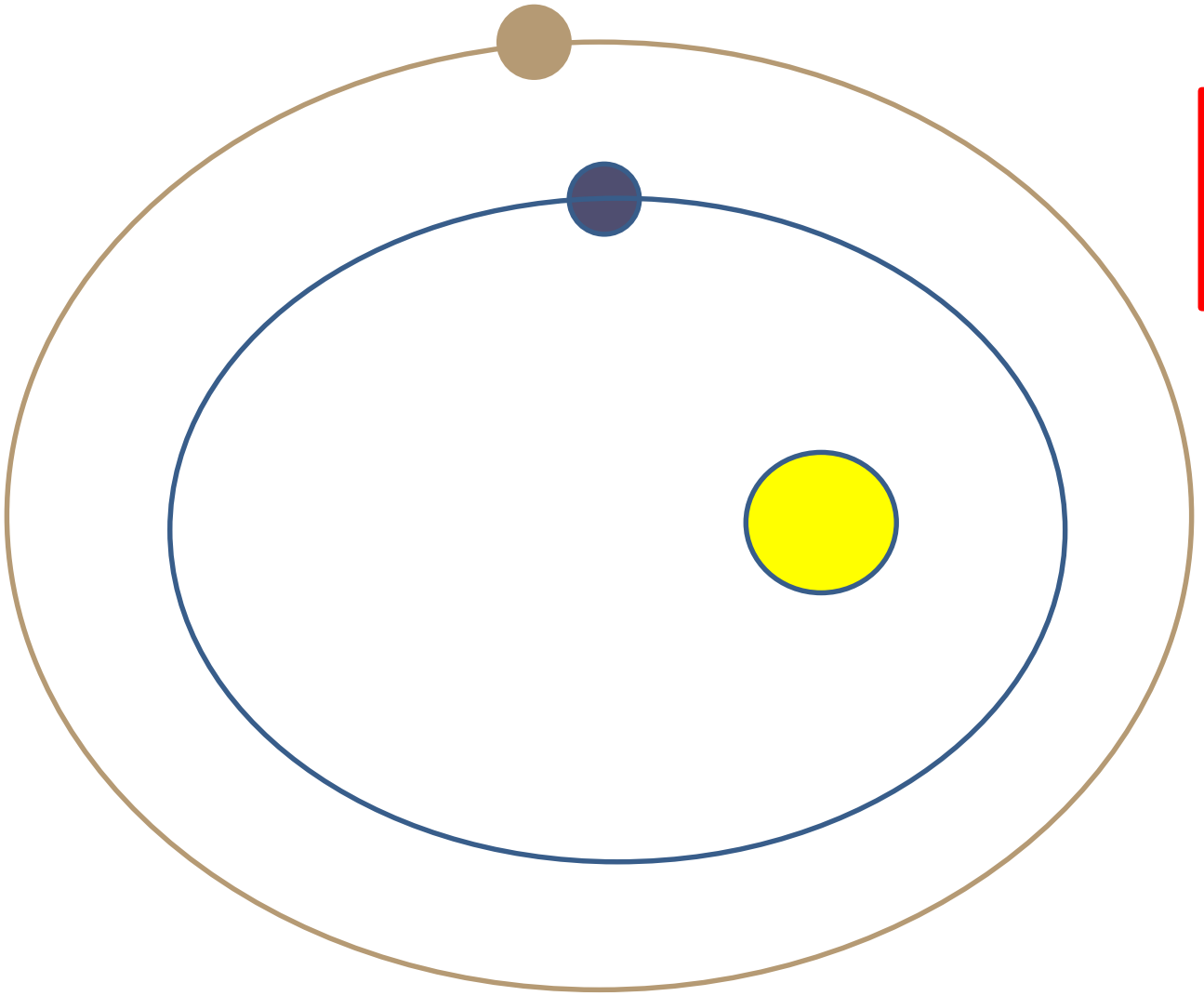


EL VECTOR POSICIÓN DEL PLANETA RESPECTO AL SOL BARRE ÁREAS IGUALES EN TIEMPOS IGUALES

AL SER ESTE MOVIMIENTO PERIODICO, CADA VEZ QUE EL PLANETA COMPLETE UNA VUELTA ALREDEDOR DEL SOL, EL TIEMPO TRANSCURRIDO SERÁ EL MISMO Y SE DENOMINA PERIODO (T), EN EL CUAL EL VECTOR POSICIÓN BARRE EL ÁREA TOTAL DE LA ELIPSE.

$$\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = \frac{A_{\text{TOTAL DE LA ELIPSE}}}{T} = \text{CTE.}$$

TERCERA LEY DE KEPLER: LEY DE LOS PERIODOS



$$\frac{T_{PLANETA}^{2}}{R_{m_{PLANETA}}^{3}} = \frac{T_{OTRO\ PLANETA}^{2}}{R_{m_{OTRO\ PLANETA}}^{3}} = CTE.$$

$$\mathbf{CTE} = \frac{\mathbf{4\pi^2}}{\mathbf{GM_S}}$$

En el sistema solar esta constante depende de la masa del sol(M_S)

MOMENTO DE PRACTICAR

- **PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN**

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

1. Para que se dé cuenta de la pequeñez de la fuerza de atracción entre dos objetos "comunes", calcule la fuerza con la que dos personas se atraen (gravitacionalmente). Para simplificar los cálculos, suponga que las masas de las personas son $m_1 = m_2 = 100\ kg$, que la distancia entre ellas es $1\ m$ y considere que $G = 10^{-10}\ Nm^2/kg^2$.

A) 10^{-3} N B) 10^{-6} N C) 10^{-9} N
D) 10^{6} N E) 10^{3} N

Sabemos:

$$F_g = G\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

$$F_g = \frac{10^{-10} \cdot 10^2 \cdot 10^2}{1}$$

$$\therefore F_g = 10^{-6}\ N$$

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

2. Para que se dé cuenta de la pequeñez de la fuerza de atracción entre dos objetos "comunes", calcule la fuerza con la que dos personas se atraen (gravitacionalmente). Para simplificar los cálculos, suponga que las masas de las personas son $m_1 = m_2 = 100\ kg$, que la distancia entre ellas es $1\ m$ y considere que $G = 10^{-10}\ Nm^2/kg^2$.

A) 10^{-3} N B) 10^{-6} N C) 10^{-9} N
D) 10^{6} N E) 10^{3} N

Sabemos:

$$F_g = G\frac{M_T \cdot M_L}{d^2}$$

$$F_g = \frac{10^{-10} \cdot 10^{25} \cdot 10^{23}}{\left(10^8\right)^2}$$

$$\therefore F_g = 10^{22}\ N$$

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

3. Dos partículas cuyas masas son m_1 y $m_2 = 4m_1$, se encuentran separadas una distancia a; halle a qué distancia de la partícula de menor masa, se debe colocar una tercera partícula de masa m para que la fuerza gravitacional sobre ella debe ser nula

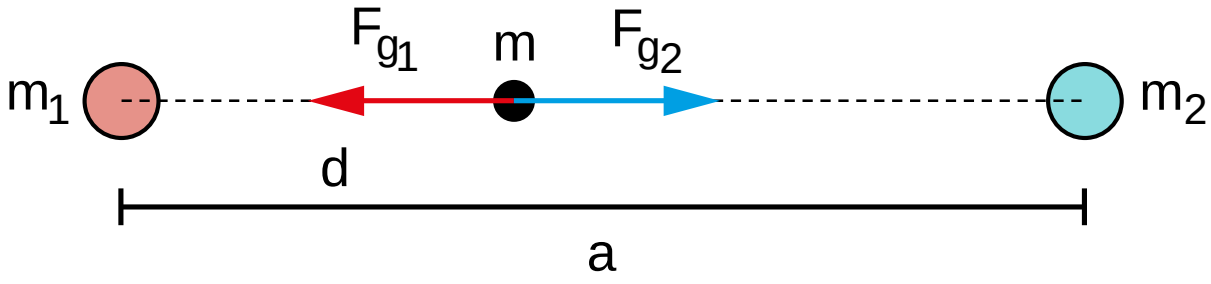
A) $\frac{a}{2}$ B) $\frac{a}{3}$ C) $\frac{a}{4}$

D) $\frac{a}{5}$ E) $\frac{a}{6}$

Sabemos :

$$F_g = G\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

DCL :



En el equilibrio : $F_{g_1} = F_{g_2}$

$$G\frac{m_1 m}{d^2} = G\frac{m_2 m}{(a-d)^2}$$

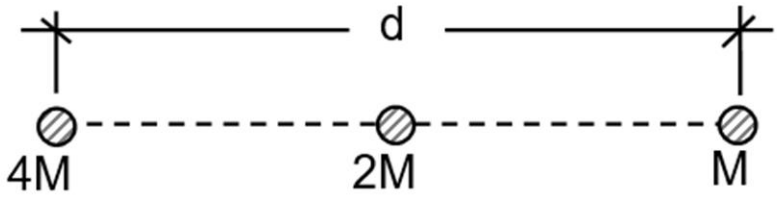
$$\frac{1}{d^2} = \frac{4}{(a-d)^2}$$

$$\rightarrow 2d = a - d \qquad \therefore d = \frac{a}{3}$$

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

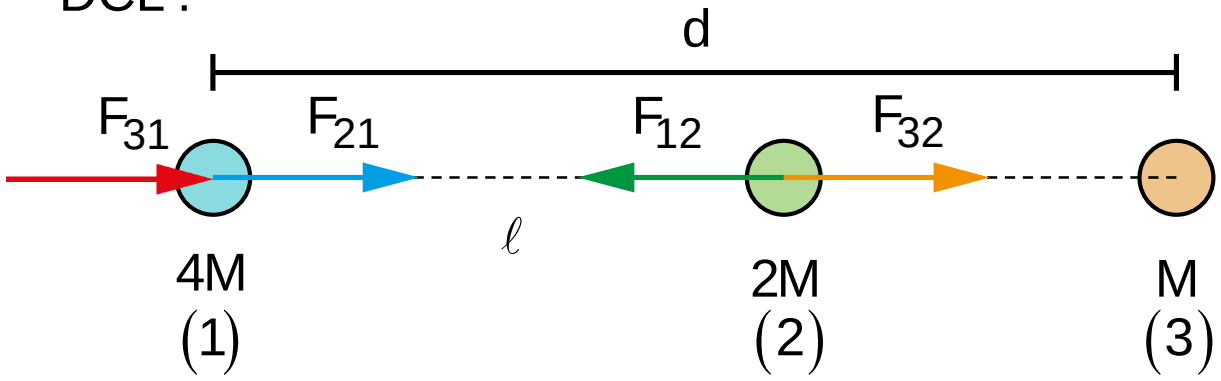
4. Se tienen tres masas puntuales indicadas en la figura. Si la fuerza de atracción gravitacional sobre 2M es cero, determine la magnitud de la fuerza gravitacional sobre la masa 4M.

$$\left(\alpha = \frac{GM^2}{d^2}\right)$$



A) 20 α B) 22 α C) 24 α
D) 26 α E) 28 α

DCL :



Partícula (2) en equilibrio : $F_{12} = F_{32}$

$$\frac{4M \cdot 2M}{\ell^2} = \frac{M \cdot 2M}{(d-\ell)^2} \rightarrow \frac{4}{\ell^2} = \frac{1}{(d-\ell)^2}$$

$$\ell = \frac{2d}{3}$$

Partícula (1): $F_{neta} = F_{21} + F_{31}$

$$F_{neta} = G\frac{4M \cdot 2M}{\left(\frac{2d}{3}\right)^2} + G\frac{4M \cdot M}{d^2} \rightarrow F_{neta} = 22\alpha$$

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

5. La masa del sol es, aproximadamente 300000 veces mayor que la masa de la Tierra y su radio vale casi 100 radios terrestres. ¿Cuál sería el valor aproximado de la aceleración de caída de un cuerpo sobre la superficie del Sol?

A) $200\ m/s^2$ B) $100\ m/s^2$

C) $50\ m/s^2$ D) $250\ m/s^2$

E) $300\ m/s^2$

$$M_S = 3x10^5 . M_T$$

$$R_S = 100 . R_T$$

Sabemos:

$$g_T = \frac{GM_T}{(R_T)^2} ...(1)$$

$$g_S = \frac{GM_S}{(R_S)^2} ...(2)$$

$(2) \div (1)$:

$$\frac{g_{sol}}{10} = \frac{\dfrac{3 \times 10^5 M_T}{(10^2 R_T)^2}}{\dfrac{M_T}{(R_T)^2}}$$

$$\therefore g_{sol} = 300\ m/s^2$$

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

6. Determine la rapidez (en km/h) que un transbordador espacial debe tener en el instante de apagar sus motores, para mantenerse en órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 800 km. Asuma que el radio del planeta es de 6400 km y la aceleración de la gravedad en la superficie $10\ m/s^2$.

A) 27153 B) 1200 C) 1060
D) 960 E) 858

$$\boxed{g_T = G\frac{M_T}{(R_T)^2}}$$

$$\boxed{GM_T = g_T.(R_T)^2}$$

d= $R_T + h = 6400\ km + 800\ km$

d= $R_T + h = 64x10^5 m + 8x10^5 m$

Sabemos : "Dinámica circular"

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$F_g = m\frac{v^2}{d}$$

$$G\frac{M_T \cdot \cancel{m}}{d^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{d}$$

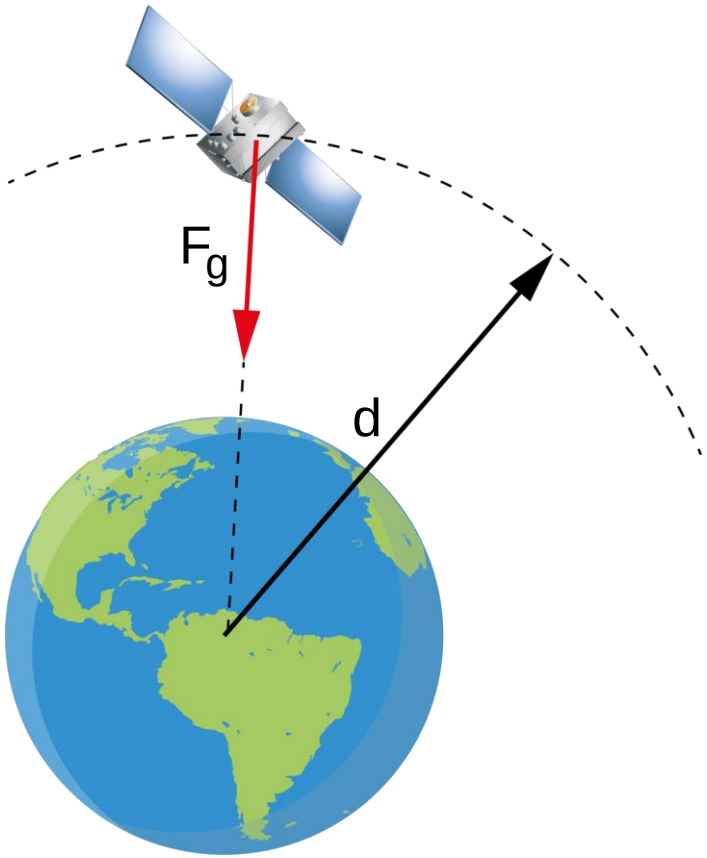
$$\boxed{\frac{g_T(R_T)^2}{d} = V^2}$$

$$\frac{10\left(64\times10^5\right)^2}{\left(64\times10^5 + 8\times10^5\right)} = v^2$$

$$v = 7542{,}472\ m/s$$

En km / h :

$$v = 27153\ km/h$$



GRAVITACIÓN UNIVERSAL

7. ¿A qué altura sobre la superficie terrestre la aceleración de la gravedad se reduce a $\frac{9}{10}$ de su valor en la superficie? R_T : Radio terrestre

A) $\frac{\sqrt{10}}{3}R_T$

B) $\left(\frac{\sqrt{10}-3}{3}\right)R_T$

C) $\frac{\sqrt{12}}{3}R_T$

D) $\frac{1}{12}R_T$

E) $\frac{12}{5}R_T$

$$\frac{9}{10}g = g_h$$

$$\frac{9}{10}\cdot \cancel{G}\frac{\cancel{M_T}}{(R_T)^2} = \cancel{G}\frac{\cancel{M_T}}{(R_T+h)^2}$$

$$3(R_T+h) = \sqrt{10}R_T$$

$$\therefore h = \left(\frac{\sqrt{10}-3}{3}\right)R_T$$

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

8. Suponiendo que el radio de un planeta sea $\frac{1}{6}$ del radio de la Tierra y que la densidad de la Tierra fuera el doble que la densidad del planeta, determine la aceleración de la gravedad $\left(\text{en } m/s^2\right)$ en la superficie del planeta.

$\left(g = 10\ m/s^2\right)$

A) 0,56 B) 0,83 C) 1,26
D) 2,32 E) 2,86

Sabemos:

$$R_P = \frac{1}{6}R_T$$

Además:

$$2\rho_P = \rho_T$$

$$2\left[\frac{M_P}{(R_P)^3}\right] = \frac{M_T}{(R_T)^3}$$

$$\boxed{M_T = 432 M_P}$$

Luego:

$$g_P = \frac{GM_P}{(R_P)^2}$$

$$g_T = \frac{GM_T}{(R_T)^2}$$

$$\frac{g_P}{10} = \frac{\cancel{G}\dfrac{\cancel{M_P}}{(\cancel{R_P})^2}}{\cancel{G}\dfrac{432\cancel{M_P}}{(6\cancel{R_P})^2}}$$

$$\frac{g_P}{10} = \frac{36}{432}$$

$$g_P = 0{,}833\ m/s^2$$

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

9. Determine la altura (en km), respecto del centro de la tierra, a la que aproximadamente debe encontrarse un astronauta para que su peso sea el 50% de su peso sobre la superficie terrestre. ($R_{tierra} = 6400$ km)

A) 7000 B) 8000 C) 9000
D) 10 000 E) 11 000

$$w_h = \frac{1}{2} w$$

$$\cancel{G}\frac{\cancel{M_T} \cdot \cancel{m_a}}{(R_T + h)^2} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m_a} \cdot \cancel{G}\frac{\cancel{M_T}}{(R_T)^2}$$

$$\sqrt{2}R_T = R_T + h$$

$$\left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot 6400 = h$$

$$\rightarrow h = 2650{,}967 \text{ km}$$

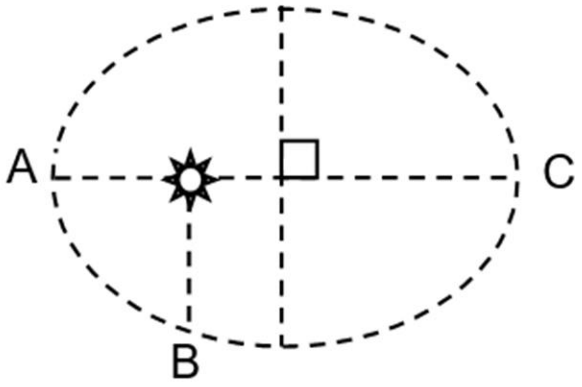
Nos piden:

$$R_T + h = 6400 + 2650{,}967$$

$$R_T + h = 9050{,}967 \text{ km}$$

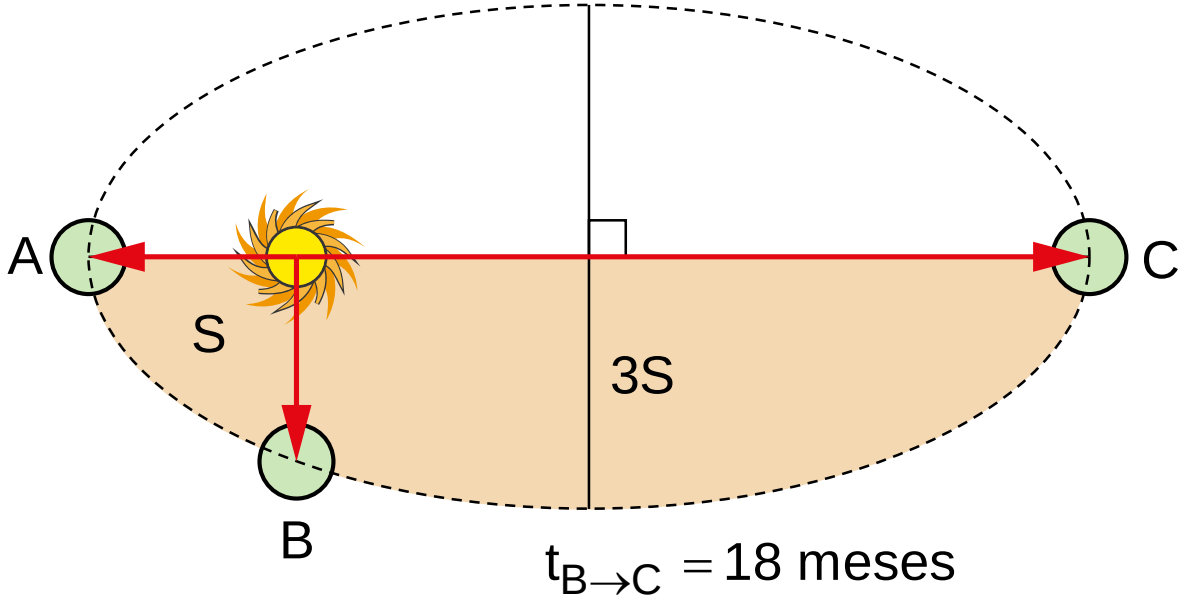
GRAVITACIÓN UNIVERSAL

10. El planeta Némesis gira en torno a la estrella Alfa Centauro, describiendo una elipse. Considerando que el área barrida por el radio vector cuando el planeta se –mueve de A hacia B es $\frac{1}{3}$ del área de B a C, determine el periodo (en meses) de dicho planeta si éste tardó 18 meses en ir de B a C.



A) 18 B) 28 C) 38
D) 42 E) 48

Del gráfico :



$t_{B\to C} = 18$ meses

Sabemos : "2da ley de Kepler"

$$\frac{\text{Área}}{\text{Tiempo}} = \text{cte}$$

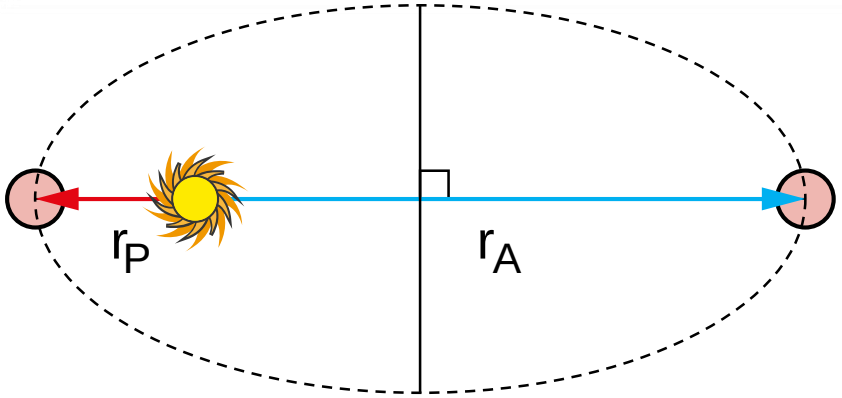
$$\frac{3S}{18} = \frac{8S}{T}$$

$$\therefore T = 48 \text{ meses}$$

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

11. Un planeta orbita alrededor del sol, siendo la distancia del sol al afelio $r_A = 1{,}52 \times 10^8$ km y la distancia del Sol al perihelio $r_P = 0{,}97\, r_A$. Halle el periodo (en días terrestres) del planeta. $\left(M_{sol} = 1{,}99 \times 10^{30}\ \text{kg}\right)$

A) 1085 B) 731 C) 365
D) 183 E) 92



Sabemos: "3^{era} ley de Kepler"

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$

$$\frac{T^2}{\left(0{,}5 \times 1{,}97 \times 1{,}52 \times 10^{11}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30}}$$

$$T = 3{,}159 \times 10^7\ \text{s}$$

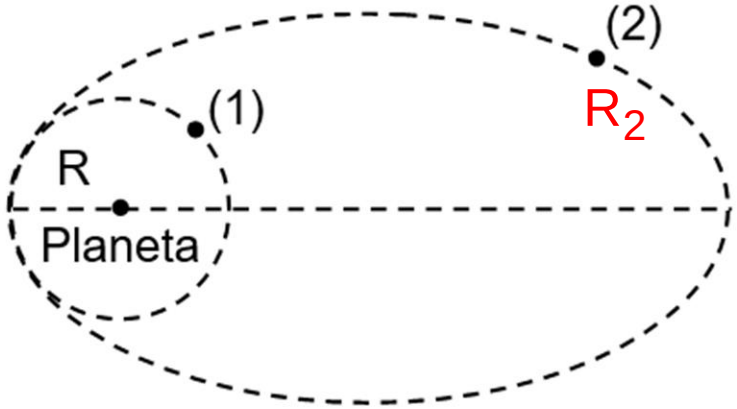
En días:

$$T = 3{,}159 \times 10^7\ \text{s} \times \frac{1\,\text{h}}{3600\ \text{s}} \times \frac{1\,\text{día}}{24\ \text{h}}$$

$$T \approx 365\ \text{días}$$

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

12. Dos satélites, artificial y natural, orbitan alrededor de un planeta tal como se muestra. Determine el máximo alejamiento del satélite 2 respecto del planeta, si su período es $5\sqrt{5}$ veces el del satélite 1.



A) 5R B) 7R C) 9R
D) 10R E) 15R

Sabemos : "3^{era} ley Kepler"

$$\frac{T^2}{R^3} = cte$$

Del gráfico :

$$\frac{(T_2)^2}{(R_2)^3} = \frac{(T_1)^2}{(R_1)^3}$$

$$\frac{(5\sqrt{5}\,\cancel{T_1})^2}{R_2^{\,3}} = \frac{(\cancel{T_1})^2}{(R)^3}$$

$$\therefore R_2 = 5R$$

Nos piden: 5R+5R-R= 9R

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

13. Un satélite artificial describe una órbita circular en torno a la Tierra con un período $T = 4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$, donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. ¿A qué altura de la superficie terrestre se encuentra el satélite?

A) R B) $\frac{R}{2}$ C) 2R

D) $R\sqrt{2}$ E) $R\sqrt{3}$

Por dato:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \rightarrow T^2 = \frac{32R^3\pi^2}{GM_T}$$

Luego: "Dinámica circular"

$$F_g = F_{cp}$$

$$\frac{GM_T\,\cancel{m_s}}{(R+h)^2} = \cancel{m_s}\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)(R+h)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{GM_T}$$

Igualando:

h=R

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

CLAVES:

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	B	A	C	B	B	D	B	A

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS